

**SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1993-94**

Maria Manfredini

**STIME A PRIORI IN L^p PER UNA CLASSE
DI OPERATORI DI TIPO KOLMOGOROV
IN FORMA DI NON DIVERGENZA E
A COEFFICIENTI DISCONTINUI**

14 aprile 1994

Riassunto. In questa nota presentiamo alcune stime a-priori L^p per operatori del secondo ordine in forma di non divergenza del tipo seguente

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^q a_{ij}(x,t) \partial_{x_i x_j} u + \sum_{i,j=1}^N b_{ij} x_i \partial_{x_j} u - \partial_t u = f \in L^p(R^{N+1}),$$

$$(x,t) \in R^{N+1}, \quad 1 \leq q \leq N, \quad b_{ij} \in R, \quad i,j = 1, \dots, N$$

dove la matrice $(a_{ij}(z))_{i,j=1,\dots,q}$ è simmetrica e "uniformemente" definita positiva in R^q . Inoltre, i coefficienti a_{ij} sono limitati e appartengono a uno spazio di funzioni a oscillazione media infinitesima modellato su una struttura di spazio omogeneo associato all'operatore L in modo naturale.

Abstract. In this note we show some a-priori L^p estimates for non divergence linear second order equations of the following type:

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^q a_{ij}(x,t) \partial_{x_i x_j} u + \sum_{i,j=1}^N b_{ij} x_i \partial_{x_j} u - \partial_t u = f \in L^p(R^{N+1}),$$

$$(x,t) \in R^{N+1}, \quad 1 \leq q \leq N, \quad b_{ij} \in R, \quad i,j = 1, \dots, N$$

where the matrix $(a_{ij}(z))_{i,j=1,\dots,q}$ is symmetric and "uniformly" positive in R^q . Moreover, the coefficients a_{ij} are bounded and belong to a space of vanishing mean oscillation functions modelled on a structure of homogeneous space naturally associated to L .

Section 6 contains a more detailed summary of this work.

§1. Introduzione.

Consideriamo l'operatore differenziale:

$$(1.1) \quad L = \sum_{i,j=1}^q a_{ij}(z) \partial_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^N b_{ij} x_i \partial_{x_j} - \partial_t,$$

dove $z = (x, t) \in R^{N+1}$, $1 \leq q \leq N$ e $b_{ij} \in R$ per ogni $i, j = 1, \dots, N$. Supponiamo a_{ij} misurabile e limitata per ogni $i, j = 1, \dots, q$ e la matrice $(a_{ij}(z))_{i,j=1, \dots, q}$ simmetrica e definita positiva in R^q per ogni $z \in R^{N+1}$.

Se Ω è un aperto di R^{N+1} e se $p \in]1, \infty[$, indichiamo con $S^p(L, \Omega)$, lo spazio

$$S^p(L, \Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / u_{x_i}, u_{x_i x_j}, Yu \in L^p(\Omega), i, j = 1, \dots, q\},$$

dove $Yu = \left(\sum_{i,j=1}^N b_{ij} x_i \partial_{x_j} - \partial_t \right) u$. Definiamo

$$\|u\|_{S^p(L, \Omega)}^p = \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^q \|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i,j=1}^q \|u_{x_i x_j}\|_{L^p(\Omega)}^p + \|Yu\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Diremo che $u \in S_{loc}^p(L, \Omega)$ se $\phi u \in S^p(L, \Omega)$ per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

In questo seminario forniremo stime a priori in $S_{loc}^p(L, \Omega)$ delle soluzioni dell'equazione $Lu = f$ qualora i coefficienti a_{ij} appartengano a uno spazio di funzioni VMO, (cioè a oscillazione media infinitesima) relativamente ad una struttura omogenea associata in modo naturale all'operatore L .

Precisamente abbiamo provato il seguente risultato:

Se $\Omega \subseteq R^{N+1}$ e $\Omega' \subset\subset \Omega$ allora esiste una costante $c > 0$ tale che

$$\|u\|_{S^p(\Omega')} \leq c (\|Lu\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)})$$

per ogni $u \in S_{loc}^p(L, \Omega)$.

Il metodo utilizzato si rifà a quello introdotto da Chiarenza-Frasca-Longo [CFL] per gli operatori ellittici e in seguito esteso da Bramanti-Cerutti in [BC] agli operatori parabolici. Tale procedimento consiste nel fornire dapprima una formula di rappresentazione per le derivate seconde di una soluzione, mediante operatori integrali singolari (e i loro commutatori) che hanno nuclei "dipendenti da un parametro"; successivamente sviluppare tali nuclei in armoniche sferiche e studiare la continuità $L^p - L^p$ degli operatori che compaiono nello sviluppo in serie.

Questo seminario è così organizzato: nella prima parte presenterò il metodo di Chiarenza, Frasca e Longo per un'equazione ellittica; nella seconda fornirò gli ingredienti principali per dimostrare le stime a priori interne per le soluzioni di $Lu = f$ dove L è l'operatore in (1.1) e $f \in L^p(R^{N+1})$.

I risultati qui presentati sono frutto di un lavoro in collaborazione con M. Bramanti e C. Cerutti.

§2. Il caso ellittico.

Sia Ω un aperto di R^N . Consideriamo l'equazione ellittica in forma di non divergenza:

$$(2.1) \quad Lu(x) \equiv \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \partial_{x_i x_j} u(x) = f(x) \quad \text{q.o. in } \Omega.$$

È noto che se i coefficienti a_{ij} sono continui allora si hanno stime a priori in $W^{2,p}(\Omega)$. Chiarenza, Frasca e Longo hanno invece provato stime a priori sotto l'ipotesi più debole: $a_{ij} \in \text{VMO}$.

Come già accennato la tecnica da loro utilizzata si fonda sui seguenti punti:

- fornire una formula di rappresentazione per le derivate seconde di una soluzione di (2.1) attraverso integrali singolari e i loro commutatori;
- stimare la norma L^p degli operatori integrali mediante lo sviluppo in armoniche sferiche dei loro nuclei.

Supponiamo che in (2.1):

- i) $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty \cap \text{VMO}(R^N)$ per $i, j = 1, \dots, N$.
- ii) Esiste $\mu > 0$ tale che

$$\frac{1}{\mu} |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu |\xi|^2$$

per ogni $x, \xi \in R^N$. (Qui e nel seguito $|\cdot|$ indica la norma euclidea in R^N).

Ricordo che $u \in \text{BMO}(R^N)$ se $u \in L^1_{loc}(R^N)$ e

$$(2.2) \quad \|u\|_* = \sup_B \int_B |u(z) - u_B| dz < +\infty$$

dove $u_B = \int_B u(z) dz = \frac{1}{|B|} \int_B u(z) dz$, e il sup è fatto su tutte le palle eucldee di R^N .

Se inoltre

$$\lim_{r \rightarrow 0} \eta(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{\rho \leq r} \int_{B_\rho} |u(z) - u_{B_\rho}| dz = 0,$$

allora diremo che $u \in \text{VMO}(R^N)$.

Fissato $x_0 \in R^N$ indichiamo con L_{x_0} l'operatore congelato in x_0

$$L_{x_0} = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x_0) \partial_{x_i x_j}.$$

Allora la soluzione fondamentale di L_{x_0} con polo in zero è la seguente

$$(2.3) \quad \Gamma^0(y) = \frac{1}{(N-2)\omega_N(\det A(x_0))^{1/2}} \left(\sum_{i,j=1}^N A_{ij}^{-1}(x_0) y_i y_j \right)^{\frac{2-N}{2}}$$

dove $A(x_0) = (a_{ij}(x_0))$ e $A^{-1}(x_0) = (A_{ij}^{-1}(x_0))$.

In seguito denoteremo con $\Gamma(x; \cdot)$ la soluzione fondamentale, con polo in zero, dell'operatore congelato in x .

Osservazione 2.1. $\Gamma^0 \in C^\infty(R^N \setminus \{0\})$, é omogenea di grado $2 - N$ e verifica la seguente proprietà: per ogni $m \in N \cup \{0\}$ e per ogni $x \in R^N$ si ha

$$(2.4) \quad \sup_{|y|=1, |\beta|=2m} \left| \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\beta \Gamma_{ij}(x; y) \right| \leq M(m).$$

Qui $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$ indica un multi-indice intero non negativo di altezza $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_N$.

Infine vale la cosiddetta proprietà di media nulla:

$$(2.5) \quad \int_{|y|=1} \Gamma_{ij}(x; y) d\sigma_y = 0 \quad \forall x \in R^N, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Teorema 2.2 (Formula di rappresentazione).

Sia $u \in C_0^\infty(R^N)$. Allora se $x \in \text{supp. } u$ e $u_{x_i x_j} = \partial_{x_i x_j} u$ si ha

$$(2.6) \quad \begin{aligned} u_{x_i x_j}(x) = & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y| \geq \epsilon} \Gamma_{ij}(x; x-y) \left[Lu(y) + \sum_{h,k=1}^q (a_{hk}(x) - a_{hk}(y)) u_{x_h x_k}(y) \right] dy \\ & + Lu(x) \int_{|y|=1} \Gamma_i(x; y) \nu_j(y) d\sigma_y, \quad i, j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Cenno della dimostrazione. Fissato $x_0 \in R^N$, indichiamo con L_0 l'operatore congelato in x_0 e con Γ^0 la corrispondente soluzione fondamentale. Allora si ha

$$u(x) = \int_{R^N} \Gamma^0(x-y) L_0 u(y) dy \quad x \in \text{supp. } u$$

e si prova che

$$u_{x_i}(x) = \int_{R^N} \Gamma_i^0(x-y) L_0 u(y) dy \quad \text{per } i = 1, \dots, N.$$

Successivamente si dimostra la seguente uguaglianza:

$$u_{x_i x_j}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y| \geq \epsilon} \Gamma_{ij}^0(x-y) L_0 u(y) dy + L_0 u(x) \int_{|y|=1} \Gamma_i^0(y) \nu_j(y) d\sigma_y.$$

per ogni fissato x_0 e x . Infine scrivendo

$$L_0 u(y) = (L_0 - L)u(y) + Lu(y) = \sum_{h,k=1}^N (a_{hk}(x_0) - a_{hk}(y)) u_{x_h x_k}(y) + Lu(y)$$

segue la (2.6).

Osservazione 2.3. Nella formula di rappresentazione compaiono integrali singolari del tipo:

$$V.P. \int \Gamma_{ij}(x; x-y)g(y)dy$$

cioé operatori di tipo convoluzione con nuclei che dipendono da un parametro. Osserviamo che per ogni $x \in R^N$ il nucleo $k(\cdot) = \Gamma_{ij}(x; \cdot)$ é di tipo Calderón-Zygmund. (Infatti $k \in C^\infty(R^N \setminus \{0\})$, k é omogeneo di grado $-N$ e verifica la proprietà di media nulla). Allora k definisce un operatore integrale $L^p - L^p$ continuo ([CZ]). Precisamente, posto

$$K_\epsilon g(x) = \int_{|x-y|>\epsilon} k(x-y)g(y)dy$$

allora K_ϵ converge in L^p per $\epsilon \rightarrow 0$, a un operatore K che é $L^p - L^p$ continuo.

Infine un analogo risultato sussiste per il commutatore, cioè se definiamo

$$C_\epsilon[a, g](x) = a(x)K_\epsilon g(x) - K_\epsilon(ag)(x), \quad a \in L^\infty(R^N),$$

allora esiste $C[a, g] \in L^p(R^N)$ tale che per ogni $g \in L^p(R^N)$

$$C_\epsilon[a, g] \rightarrow C[a, g] \quad \text{in } L^p \text{ per } \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|C_\epsilon[a, g]\|_{L^p} \leq c(p)\|a\|_* \|g\|_{L^p}.$$

Le armoniche sferiche

Per ogni fissato $x \in R^N$ sviluppiamo il nucleo $\Gamma_{ij}(x; \cdot)$ in armoniche sferiche. Ricordiamo che le armoniche sferiche di grado m in R^N sono i polinomi armonici omogenei di grado m ristretti alla sfera unitaria Σ_N ; esse formano uno spazio di dimensione finita g_m .

É possibile costruire un sistema di armoniche sferiche ortonormale e completo in $L^2(\Sigma_N)$ che in seguito indicheremo con

$$\{Y_{km}\} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad k = 1, \dots, g_m.$$

Allora se $f \in C^\infty(\Sigma_N)$ si può considerare il suo sviluppo in serie di Fourier rispetto a $\{Y_{km}\}$:

$$f(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{g_m} b_{km} Y_{km}(x)$$

dove $b_{km} = \int_{\Sigma_N} f(x) Y_{km}(x) d\sigma_x$ e verifica la seguente disuguaglianza

$$|b_{km}| \leq A_r m^{-2r} \sup_{|\zeta|=1, |\beta|=2r} \left| \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^\beta f(\zeta) \right|$$

per ogni r naturale, ove A_r è una costante positiva indipendente da k e da m e β un multiindice intero. Inoltre vale la seguente stima:

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta Y_{km}(x) \right\|_{L^\infty(\Sigma_N)} \leq c m^{\frac{N-2}{2} + |\beta|}.$$

Consideriamo allora l'operatore

$$T_\epsilon g(x) = \int_{|x-y| \geq \epsilon} \Gamma_{ij}(x; x-y) g(y) dy,$$

che compare nella formula di rappresentazione. L'idea è quella di sviluppare il nucleo $\Gamma_{ij}(x; \cdot)$ in armoniche sferiche e scrivere T_ϵ come somma di una serie di operatori di tipo Calderón-Zygmund.

Precisamente

$$\Gamma_{ij}(x; y) = \frac{1}{|y|^N} \Gamma_{ij}(x; y'), \quad y' = \frac{y}{|y|} \in \Sigma_N,$$

allora

$$\Gamma_{ij}(x; y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{g_m} b_{km}^{ij}(x) \frac{Y_{km}(y')}{|y|^N}.$$

dove

$$b_{km}^{ij}(x) = \int_{\Sigma_N} \Gamma_{ij}(x; y) Y_{km}(y) d\sigma_y.$$

Osserviamo infine che la proprietà di media nulla (2.5) assicura che $b_{1m}^{ij} = 0$ se $m = 0$.

Allora

$$T_\epsilon g(x) = \int_{|x-y| \geq \epsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{g_m} b_{km}^{ij}(x) \frac{Y_{km}((x-y)')}{|x-y|^N} g(y) dy,$$

dove

$$\frac{Y_{km}(y')}{|y|^N}$$

è di tipo Calderón-Zygmund.

Si dimostra che la serie converge totalmente in $L^p(R^N)$ e uniformemente rispetto ad ϵ . Per la prova sono risultate cruciali le stime (2.4) di Γ_{ij} .

Sussistono i seguenti teoremi:

Teorema 2.4. Per ogni $g \in L^p(R^N)$ esiste $Tg \in L^p(R^N)$ tale che

$$T_\epsilon g \rightarrow Tg \quad \text{in } L^p \text{ per } \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|Tg\|_{L^p} \leq c \|g\|_{L^p} \quad \forall \epsilon > 0.$$

Per i commutatori vale l'analogo teorema

Teorema 2.5. Se $a \in L^\infty(R^N)$, posto

$$C_\epsilon[a, g](x) = \int_{|x-y| \geq \epsilon} \Gamma_{ij}(x; x-y) (a(x) - a(y)) g(y) dy$$

allora per ogni $g \in L^p(R^N)$ esiste $C[a, g] \in L^p(R^N)$ tale che

$$C_\epsilon[a, g] \rightarrow C[a, g] \quad \text{in } L^p \text{ per } \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|C[a, g]\|_{L^p} \leq c \|a\|_* \|g\|_{L^p}.$$

Dalla formula di rappresentazione e dai Teoremi 2.4, 2.5 segue

Teorema 2.6 (Stime a priori). ([CFL]) Se $\Omega' \subset\subset \Omega$ allora esiste una costante positiva $c = c(N, p, \mu, M, \text{dist}(\Omega', \partial\Omega))$ tale che

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leq c (\|Lu\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}), \quad \forall u \in W_{loc}^{2,p}(\Omega).$$

§3. Equazioni di tipo Kolmogorov: preliminari.

In R^{N+1} consideriamo l'operatore differenziale:

$$(3.1) \quad L = \sum_{i,j=1}^q a_{ij}(z) \partial_{x_i, x_j} + \langle x, BD \rangle - \partial_t, \quad D = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_N}),$$

dove $z = (x, t) \in R^{N+1}$, $1 \leq q \leq N$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica il prodotto interno in R^N .

Sui coefficienti di L faremo le seguenti ipotesi:

H₁) $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(R^{N+1})$ per $i, j = 1, \dots, q$ ed esiste $\mu > 0$ tale che

$$\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^q \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^q a_{ij}(z) \xi_i \xi_j \leq \mu \sum_{i=1}^q \xi_i^2$$

per ogni $z \in R^{N+1}$ e $(\xi_1, \dots, \xi_q) \in R^q$.

H₂) B è una matrice costante $N \times N$ e ha la forma seguente:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

dove per ogni $i = 1, \dots, r$, B_i è una matrice $p_{i-1} \times p_i$ con rango p_i , $q = p_0 \geq p_1 \geq \dots \geq p_r$ e $p_0 + p_1 + \dots + p_r = N$.

Ad esempio se in R^{2n+1} consideriamo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

allora

$$L = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 + \sum_{i=1}^n x_i \partial_{x_{n+i}} - \partial_t,$$

é un prototipo dell'operatore di Kolmogorov, verifica H_1 e H_2 con $q = p_0 = p_1 = n$ ed $r = 1$.

Fissato $z_0 \in R^{N+1}$, indichiamo con L_{z_0} l'operatore congelato in z_0

$$L_{z_0} = \sum_{i,j=1}^q a_{ij}(z_0) \partial_{x_i, x_j} + \langle x, BD \rangle - \partial_t.$$

Osservazione 3.1. (Invarianza di L_{z_0} per traslazioni).

Se si pone

$$(x, t) \circ (y, \tau) = (y + E(\tau)x, t + \tau) \quad \text{per ogni } (x, t), (y, \tau) \in R^{N+1}$$

dove

$$E(\tau) = \exp(-\tau B^T),$$

allora (R^{N+1}, \circ) é un gruppo (non commutativo) il cui elemento neutro é $(0, 0)$; l'inverso di un elemento $(x, t) \in R^{N+1}$ é $(x, t)^{-1} = (-E(-t)x, -t)$. É facile riconoscere che per ogni $z_0 \in R^{N+1}$ l'operatore L_{z_0} é invariante per traslazioni a sinistra del gruppo (R^{N+1}, \circ) .

Osservazione 3.2. (Invarianza di L_{z_0} per dilatazioni).

Esiste un gruppo di dilatazioni su R^{N+1} , che indicheremo con $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ rispetto al quale L_{z_0} é omogeneo di grado 2, nel senso seguente:

$$L_{z_0} \circ D(\lambda) = \lambda^2 D(\lambda) \circ L_{z_0}.$$

La dilatazione $D(\lambda)$ é del tipo seguente

$$D(\lambda) : R^{N+1} \rightarrow R^{N+1}, \quad D(\lambda)(x, t) = (\lambda^{\alpha_1} x_1, \dots, \lambda^{\alpha_N} x_N, \lambda^{\alpha_{N+1}} t)$$

dove $\alpha_1 = \dots = \alpha_{p_0} = 1$, $\alpha_{p_0+1} = \dots = \alpha_{p_0+p_1} = 3$, \dots , $\alpha_{p_0+\dots+p_{r-1}+1} = \dots = \alpha_N = 2r+1$ e $\alpha_{N+1} = 2$, (Cfr. [LP]). Possiamo quindi scrivere

$$D(\lambda) = \text{diag}(\lambda I_{p_0}, \lambda^3 I_{p_1}, \lambda^5 I_{p_2}, \dots, \lambda^{2r+1} I_{p_r}, \lambda^2)$$

dove I_k é la matrice identità $k \times k$. Indichiamo con $Q+2$ la *dimensione omogenea* di R^{N+1} rispetto a $(D(\lambda))_{\lambda>0}$

$$Q+2 = p_0 + 3p_1 + 5p_2 + \dots + (2r+1)p_r + 2.$$

Osserviamo che $Q+2$ é definito implicitamente anche dall'identità $\det D(\lambda) = \lambda^{Q+2}$. Nel seguito chiameremo Q la *dimensione omogenea spaziale* e denoteremo con $D_0(\lambda)$ la restrizione di $D(\lambda)$ ad R^N .

Introduciamo ora una "norma" in R^{N+1} omogenea di grado 1 rispetto al gruppo di dilatazioni $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ (Cfr. [FR]).

Definizione 3.3. Se $z \in R^{N+1} \setminus \{0\}$ poniamo $\|z\| = \rho$ se ρ è l'unica soluzione positiva dell'equazione

$$\frac{x_1^2}{\rho^{2\alpha_1}} + \frac{x_2^2}{\rho^{2\alpha_2}} + \dots + \frac{x_N^2}{\rho^{2\alpha_N}} + \frac{t^2}{\rho^4} = 1.$$

Allora

Proposizione 3.4. L'applicazione $z \mapsto \|z\|$ ha le seguenti proprietà

$N_1)$ $\|D(\lambda)z\| = \lambda\|z\|$ per ogni $z \in R^{N+1}$ e per ogni $\lambda > 0$.

$N_2)$ L'insieme $\{z/\|z\| = 1\}$ è la sfera euclidea $\Sigma_{N+1} = \{(x, t)/|x|^2 + t^2 = 1\}$.

$N_3)$ Esiste una costante $c \geq 1$ tale che per ogni $z, \zeta \in R^{N+1}$ si ha

$$\|z + \zeta\| \leq c(\|z\| + \|\zeta\|) \quad \text{e} \quad \|z \circ \zeta\| \leq c(\|z\| + \|\zeta\|)$$

e

$$\frac{1}{c}\|z\| \leq \|z^{-1}\| \leq c\|z\|.$$

$N_4)$ Esiste $\beta = \beta(r) \in]0, 1]$ tale che per ogni compatto K di R^{N+1} esiste $c > 0$ tale che

$$|z - \zeta| \leq c\|\zeta^{-1} \circ z\|^\beta, \quad z, \zeta \in K,$$

dove $|\cdot|$ indica la norma euclidea in R^{N+1} .

Introduciamo ora una "distanza" in R^{N+1} modellata sulla norma $\|\cdot\|$:

Definizione 3.5. Per ogni $z, \zeta \in R^{N+1}$ poniamo

$$d(z, \zeta) = \|\zeta^{-1} \circ z\| + \|z^{-1} \circ \zeta\|.$$

Da N_3 si evince che d è una quasidistanza nel senso che

$$d(z, \zeta) \geq 0, \quad d(z, \zeta) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad z = \zeta,$$

ed esiste $c > 0$ tale che

$$d(z, \zeta) \leq c(d(z, z') + d(z', \zeta))$$

per ogni $z, z', \zeta \in R^{N+1}$.

Denoteremo con $B(z, r)$ oppure con $B_r(z)$ l'insieme

$$(3.2) \quad B(z, r) = \{\zeta \in R^{N+1} / d(z, \zeta) \leq r\}.$$

Osservazione 3.6. La misura di Lebesgue è invariante per le traslazioni del gruppo (R^{N+1}, \circ) . Infatti se F è un sottoinsieme di R^{N+1} per ogni $\zeta = (\xi, \tau) \in R^{N+1}$ si ha

$$|F| = \int_F dz = (\text{posto } z' = \zeta \circ z) = \int_{\zeta \circ F} dz'$$

in quanto $dz = dz'$ essendo $z' = (x + E(t)\xi, t + \tau')$.

Analogamente

$$|F| = \int_F dz = (\text{posto } z' = z \circ \zeta) = \int_{F \circ \zeta} dz'$$

in quanto $dz = dz'$ essendo $z' = (\xi + E(\tau)x, t + \tau')$ e $|\det E(\tau)| = 1$. Quest'ultima identità si ottiene dalla seguente:

$$E(\lambda^2 t) = D_0(\lambda)E(t)D_0\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{per ogni } \lambda > 0$$

(cfr. [LP]). Da questa infatti si trova $\det(E(\lambda^2 \tau)) = \det E(\tau)$ per ogni $\lambda > 0$. Per $\lambda \rightarrow 0$ si ha $1 = |\det E(0)| = |\det E(\tau)|$ per ogni $\tau \in R$.

Osservazione 3.7. $|B(z, r)| = |B(0, r)| = |B(0, 1)|r^{Q+2}$, per ogni $z \in R^{N+1}$ e per ogni $r > 0$. Questo segue dalla invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue, dalla $D(\lambda)$ -omogeneità di grado 1 di $\|\cdot\|$ e dalla definizione di dimensione omogenea di R^{N+1} rispetto a $(D(\lambda))_{\lambda>0}$:

$$|B(0, r)| = \int_{\|\zeta\| + \|\zeta^{-1}\| \leq r} d\zeta = \int_{\|D(\frac{1}{r})\zeta\| + \|D(\frac{1}{r})\zeta^{-1}\| \leq 1} d\zeta.$$

Poiché $\|D(\frac{1}{r})\zeta^{-1}\| = \|(D(\frac{1}{r})\zeta)^{-1}\|$ e $d(D(\frac{1}{r})\zeta) = r^{-Q-2}d\zeta$ si ha

$$|B(0, r)| = r^{Q+2} \int_{\|\zeta\| + \|\zeta^{-1}\| \leq 1} d\zeta = r^{Q+2} |B(0, 1)|.$$

In particolare, (R^{N+1}, dz, d) è uno spazio di natura omogenea nel senso di Coifman e Weiss ([CW]) in quanto

$$|B(z, 2r)| = 2^{Q+2} |B(z, r)| \quad \forall z \in R^{N+1}, \quad \forall r > 0.$$

§4. Operatore a coefficienti congelati e formula di rappresentazione per le derivate seconde.

Fissiamo $z_0 \in R^{N+1}$ e indichiamo con L_{z_0} l'operatore congelato in z_0

$$L_{z_0} = \sum_{i,j=1}^q a_{ij}(z_0) \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \langle x, BD \rangle - \partial_t.$$

Le condizioni H_1 e H_2 assicurano che l'algebra di Lie generata da $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_q}, Y$ ha rango $N+1$ in ogni punto di R^{N+1} e che, per ogni fissato $z_0 \in R^{N+1}$, l'operatore L_{z_0} è ipoellittico, (cfr. [LP]).

La soluzione fondamentale di L_{z_0} con polo in zero è la seguente

$$\Gamma^0(x, t) = \frac{1}{(4\pi)^{N/2} (\det C(t, z_0))^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{4} \langle C^{-1}(t, z_0)x, x \rangle \right)$$

se $t > 0$, $\Gamma^0(x, t) = 0$ se $t \leq 0$.

La soluzione fondamentale con polo in (y, τ) é la traslata di Γ^0 rispetto al gruppo (R^{N+1}, \circ) :

$$\Gamma^0(x, t; y, \tau) = \Gamma^0((y, \tau)^{-1} \circ (x, t); (0, 0)) = \Gamma^0((y, \tau)^{-1} \circ (x, t)).$$

$C(t, z_0)$ é la matrice

$$C(t, z_0) = \int_0^t E(s) A(z_0) E^T(s) ds$$

essendo $A(z_0)$ matrice costante $N \times N$

$$A(z_0) = \begin{pmatrix} A_0(z_0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e $A_0(z_0)$ la matrice $q \times q$ simmetrica e definita positiva in R^q : $A_0(z_0) = (a_{ij}(z_0))_{i,j=1,\dots,q}$.

Utilizzando le dilatazioni $D(\lambda)$, la soluzione fondamentale Γ^0 , per $t > 0$, si può scrivere nel seguente modo:

$$(4.1) \quad \Gamma^0(x, t) = \frac{t^{-\frac{Q}{2}}}{(4\pi)^{N/2} (\det C(1, z_0))^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{4} \langle C^{-1}(1, z_0) D_0(\frac{1}{\sqrt{t}}) x, D_0(\frac{1}{\sqrt{t}}) x \rangle \right),$$

(Cfr. [LP]).

In seguito denoteremo con $\Gamma(z; \cdot)$ la soluzione fondamentale, con polo in zero, dell'operatore congelato in z .

Proposizione 4.1 (Proprietá di Γ). Sia $z_0 \in R^{N+1}$ e $\Gamma^0(\cdot) = \Gamma(z_0; \cdot)$. Allora

$G_1)$ $\Gamma^0 \in C^\infty(R^{N+1} \setminus \{0\})$.

$G_2)$ Γ^0 é $D(\lambda)$ -omogenea di grado $-Q$. Inoltre $\Gamma^0_i = \partial_{x_i} \Gamma^0$ e $\Gamma^0_{ij} = \partial_{x_i x_j} \Gamma^0$ sono $D(\lambda)$ -omogenee di grado rispettivamente $-Q - \alpha_i$ e $-Q - \alpha_i - \alpha_j$ per ogni $i, j = 1, \dots, N+1$.

In particolare Γ^0_{ij} é omogenea di grado $-Q - 2$ per $i, j = 1, \dots, q$.

$G_3)$ Posto $c = \max \{ \sup_{\Sigma_{N+1}} |\Gamma^0_i(z)|, \sup_{\Sigma_{N+1}} |\Gamma^0_{ij}(z)| \}$, $i, j = 1, \dots, N$ risulta

$$|\Gamma^0_i(z)| \leq \frac{c}{||z||^{Q+\alpha_i}} \quad e \quad |\Gamma^0_{ij}(z)| \leq \frac{c}{||z||^{Q+\alpha_i+\alpha_j}}, \quad \forall z \in R^{N+1} \setminus \{0\}.$$

$G_4)$ Per ogni $m \in N \cup \{0\}$ e per ogni $z \in R^{N+1}$ si ha

$$\sup_{||\zeta||=1, |\beta|=2m} \left| \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^\beta \Gamma_{ij}(z; \zeta) \right| \leq c(r, m).$$

Qui $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N, \beta_{N+1})$ indica un multi-indice intero non negativo di altezza $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_N + \beta_{N+1}$.

Teorema 4.2 (Proprietá di media nulla di Γ_{ij}^0).

Per ogni a, b con $0 < a < b$ si ha

$$(4.2) \quad \int_{a \leq \|z\| \leq b} \Gamma_{ij}^0(\zeta) d\zeta = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, q.$$

Γ_{ij}^0 é quindi un nucleo che definisce una distribuzione di tipo zero secondo Rothschild e Stein, [RS].

Teorema 4.3 (Formula di rappresentazione per le derivate seconde).

Sia $u \in C_0^\infty(R^{N+1})$. Allora se $z \in \text{supp. } u$ e $u_{x_i x_j} = \partial_{x_i x_j} u$ si ha

$$(4.3) \quad \begin{aligned} u_{x_i x_j}(z) = & - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\|\zeta^{-1} \circ z\| \geq \sqrt{\epsilon}} \Gamma_{ij}(z; \zeta^{-1} \circ z) \left[Lu(\zeta) + \sum_{hk=1}^q (a_{hk}(z) - a_{hk}(\zeta)) u_{x_h x_k}(\zeta) \right] d\zeta \\ & - Lu(z) \int_{\|\zeta\|=1} \Gamma_i(z; \zeta) \nu_j(\zeta) d\sigma_\zeta, \quad i, j = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

§5. Stime interne a priori.

Consideriamo l'operatore

$$T_\epsilon g(z) = \int_{\|\zeta^{-1} \circ z\| \geq \sqrt{\epsilon}} \Gamma_{ij}(z; \zeta^{-1} \circ z) g(\zeta) d\zeta,$$

che compare nella formula di rappresentazione (4.3).

Vale il seguente teorema:

Teorema 5.1. Per ogni $g \in L^p(R^{N+1})$ esiste $Tg \in L^p(R^{N+1})$ tale che

$$T_\epsilon g \rightarrow Tg \quad \text{in } L^p \text{ per } \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|Tg\|_{L^p} \leq c \|g\|_{L^p} \quad \forall g \in L^p.$$

Come nel caso ellittico si può sviluppare il nucleo $\Gamma_{ij}(z; \cdot)$ in armoniche sferiche, e scrivere T_ϵ come somma di una serie di operatori di tipo "convoluzione con nuclei costanti".

Precisamente, per l'omogeneità si ha

$$\Gamma_{ij}(z; \zeta) = \frac{1}{\|\zeta\|^{Q+2}} \Gamma_{ij}(z; \zeta')$$

dove $\zeta' = D(\frac{1}{\|\zeta\|})\zeta \in \Sigma_{N+1}$. Allora se $b_{km}^{ij}(z) = \int_{\Sigma_{N+1}} \Gamma_{ij}(z; \zeta) J(\zeta) Y_{km}(\zeta) d\sigma_\zeta$ si ha

$$\Gamma_{ij}(z; \zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{g_m} b_{km}^{ij}(z) \frac{Y_{km}(\zeta')}{\|\zeta\|^{Q+2}} \quad \forall z, \zeta \in R^{N+1}.$$

Perciò possiamo scrivere

$$T_\epsilon g(z) = \int_{\|\zeta^{-1} \circ z\| \geq \sqrt{\epsilon}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{g_m} b_{km}^{ij}(z) \frac{Y_{km}((\zeta^{-1} \circ z)')}{\|\zeta^{-1} \circ z\|^{Q+2}} g(\zeta) d\zeta.$$

Uno dei punti cruciali nella prova del Teorema 5.1 é la dimostrazione della continuit  $L^p - L^p$ dell'operatore integrale singolare con nucleo

$$h_{km}(\zeta) = \frac{Y_{km}(\zeta')}{\|\zeta\|^{Q+2}}.$$

Osserviamo che h_{km} é omogeneo di grado $-Q - 2$ e verifica la propriet  di media nulla. Si pu  inoltre dimostrare che h_{km} soddisfa la seguente condizione di H rmander puntuale: esistono $\beta \in]0, 1]$ e $c > 0$ tali che

$$|h_{km}(\eta^{-1} \circ \zeta) - h_{km}(\eta^{-1} \circ z)| + |h_{km}(\zeta^{-1} \circ \eta) - h_{km}(z^{-1} \circ \eta)| \leq c \frac{\|\zeta^{-1} \circ z\| + \|z^{-1} \circ \zeta\|^\beta \|z^{-1} \circ \eta\|^{1-\beta}}{\|z^{-1} \circ \eta\|^{Q+3}}$$

se $\|z^{-1} \circ \eta\| \geq M \|\zeta^{-1} \circ z\|$, M sufficientemente grande e $c = c(N, r)m^{(N+1)/2}$.

Si dimostra il seguente teorema:

Teorema 5.2. Per ogni $m = 1, 2, \dots$, $k = 1, \dots, g_m$ e per ogni $p \in]1, \infty[$ l'operatore

$$H_{km}^\epsilon g(z) = \int_{\|\zeta^{-1} \circ z\| \geq \sqrt{\epsilon}} h_{km}(\zeta^{-1} \circ z) g(\zeta) d\zeta,$$

  continuo in L^p ; $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_{km}^\epsilon = H_{km}$ e $H_{km} : L^p \rightarrow L^p$   lineare e continuo. Infine per ogni $\epsilon > 0$

$$\|H_{km}^\epsilon g\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})} \leq c_{km} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})}$$

e $c_{km} = c(N, r, p)m^{(N+1)/2}$.

Per provare la continuit  $L^2 - L^2$ dell'operatore H_{km}^ϵ abbiamo utilizzato un teorema di Cotlar per operatori su uno spazio di Hilbert ([C]); per la continuit  $L^p - L^p$ con $1 < p < 2$ abbiamo applicato i teoremi di Coifman-Weiss per spazi di natura omogenea ([CW]); per $p > 2$ abbiamo proceduto per dualit .

Infine per quanto riguarda lo studio del commutatore

$$(5.1) \quad \sum_{h,k=1}^g C^\epsilon[a_{hk}, u_{x_h x_k}](z) = \sum_{h,k=1}^g \int_{\|\zeta^{-1} \circ z\| \geq \sqrt{\epsilon}} \Gamma_{ij}(z; \zeta^{-1} \circ z) (a_{hk}(z) - a_{hk}(\zeta)) u_{x_h x_k}(\zeta) d\zeta.$$

la tecnica da noi seguita consiste ancora nello sviluppare in armoniche sferiche e scrivere il commutatore come somma di una serie di commutatori con nuclei "costanti" che sono $L^p - L^p$ continui con norme che dipendono dai coefficienti a_{hk} . Per questo dobbiamo introdurre una ulteriore ipotesi sui coefficienti di L .

Indicheremo con BMO_L e con VMO_L rispettivamente gli spazi di funzioni ad oscillazione media limitata e ad oscillazione media infinitesima, relativamente alla struttura omogenea associata all'operatore L e introdotta nel paragrafo 3.

Definizione 5.3. Diremo che $u \in BMO_L$ rispetto alla metrica d se $u \in L^1_{loc}(R^{N+1})$ e

$$\|u\|_* = \sup_B \int_B |u(z) - u_B| dz < +\infty$$

dove $u_B = \int_B u(z) dz = \frac{1}{|B|} \int_B u(z) dz$, e il sup é fatto su tutti gli insiemi B definiti in (3.2).

Se inoltre

$$\lim_{r \rightarrow 0} \eta(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{\rho \leq r} \int_{B_\rho} |u(z) - u_{B_\rho}| dz = 0,$$

allora diremo che $u \in VMO_L$.

Per i commutatori in (5.1) si ha un risultato analogo al Teorema 5.1.

Teorema 5.4. Se $a \in L^\infty(R^{N+1})$ e

$$C_\epsilon[a, g](z) = \int_{\|\zeta^{-1} \circ z\| \geq \sqrt{\epsilon}} \Gamma(z; \zeta^{-1} \circ z) (a(z) - a(\zeta)) g(\zeta) d\zeta$$

allora esiste $C[a, g] \in L^p(R^{N+1})$ tale che per ogni $g \in L^p(R^{N+1})$

$$C_\epsilon[a, g] \rightarrow C[a, g] \quad \text{in } L^p \text{ per } \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|C[a, g]\|_{L^p} \leq c \|a\|_* \|g\|_{L^p},$$

ove c é una costante indipendente da g .

Ora, se i coefficienti a_{ij} dell'operatore L verificano la seguente ulteriore l'ipotesi

H₃) $a_{ij} \in VMO_L$ per ogni $i, j = 1, \dots, q$,

dalla formula di rappresentazione (4.3) e dai Teoremi 5.1 e 5.4 si ottiene in modo standard la dimostrazione delle seguenti stime a priori interne in L^p delle soluzioni dell'equazione $Lu = f$.

Teorema 5.5 (Stime a priori in $S^p_{loc}(L, \Omega)$). Esistono $c > 0$ e $r_0 > 0$ tali che se $B_{r_0} \subset\subset \Omega$ allora

$$\|u\|_{S^p(B_{r/2})} \leq c (\|Lu\|_{L^p(B_r)} + \|u\|_{L^p(B_r)}),$$

per ogni $r \leq r_0$ e per ogni $u \in S^p_{loc}(L, \Omega)$.

La prova di questo teorema si basa, oltre che sui risultati precedenti, sui seguenti lemmi:

Lemma 5.6. Se $a \in VMO_L \cap L^\infty(R^{N+1})$ allora per ogni $\epsilon > 0$ esistono $c > 0$ e $r_0 > 0$ tali che $B_{r_0} \subset\subset \Omega$ e

$$\|C[a, f]\|_{L^p(B_r)} \leq c \epsilon \|f\|_{L^p(B_r)},$$

per ogni $r \leq r_0$ e per ogni $f \in L^p(B_r)$.

Lemma 5.7. Esistono $c > 0$ e $r_0 > 0$ tali che se $B_{r_0} \subset \subset \Omega$ si ha

$$\sum_{i,j=1}^q \|u_{x_i x_j}\|_{L^p(B_r)} + \|Yu\|_{L^p(B_r)} \leq c \|Lu\|_{L^p(B_r)},$$

per ogni $r \leq r_0$ e per ogni $u \in S_{loc}^p(L, \Omega)$

Concludiamo l'esposizione mostrando soltanto la breve

Dimostrazione del Lemma 5.7. Sia r_0 come nel Lemma 5.6. Dalla formula di rappresentazione (4.3) e dai Teoremi 5.1, 5.4 e dall'ipotesi H_3 segue la disuguaglianza

$$\|u_{x_i x_j}\|_{L^p(B_r)} \leq c \left(\epsilon \sup_{h,l} \|u_{x_h x_l}\|_{L^p(B_r)} + \|Lu\|_{L^p(B_r)} \right),$$

per ϵ sufficiente piccolo e con una costante c indipendente da u e da ϵ . Allora scegliendo $\epsilon > 0$ tale che $c\epsilon \leq 1/2$, dalla precedente stima si ricava

$$\|u_{x_i x_j}\|_{L^p(B_r)} \leq c \|Lu\|_{L^p(B_r)}.$$

Infine, poiché $Yu = Lu - \sum_{i,j=1}^q a_{ij} u_{x_i x_j}$,

$$\|Yu\|_{L^p(B_r)} \leq c \|Lu\|_{L^p(B_r)}.$$

§6. Summary.

We consider in R^{N+1} the following class of operators:

$$L = \sum_{i,j=1}^q a_{ij}(z) \partial_{x_i x_j} + \langle x, BD \rangle - \partial_t, \quad D = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_N}),$$

where $z = (x, t) \in R^{N+1}$, $1 \leq q \leq N$, B is a constant $N \times N$ matrix and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the inner product in R^N .

We suppose that:

$H_1)$ $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(R^{N+1})$ for $i, j = 1, \dots, q$ and $A(z) = (a_{ji}(z))_{i,j=1,\dots,q}$ is a $q \times q$ matrix such that for every $z \in R^{N+1}$

$$\frac{1}{\mu} I_q \leq A(z) \leq \mu I_q,$$

($\mu > 0$ and I_q denotes the $q \times q$ identity matrix).

$H_2)$ B is a constant matrix of the type:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

where for every $i = 1, \dots, r$, B_i is a $p_{i-1} \times p_i$ matrix with maximum rank p_i and $q = p_0 \geq p_1 \geq \dots \geq p_r$.

As remarked in 3.1 and 3.2 we can define a group (R^{N+1}, o) and a family of dilatations $(D(\lambda))_{\lambda > 0}$ on R^{N+1} such that for every $z_0 \in R^{N+1}$ the freezed operator

$$L_{z_0} = \sum_{i,j=1}^q a_{ij}(z_0) \partial_{x_i, x_j} + \langle x, BD \rangle - \partial_t,$$

is invariant respect to the left translations relative to o . On the other hand, L_{z_0} commutes with the dilatations $(D(\lambda))$ in the following sense $L_{z_0} \circ D(\lambda) = \lambda^2 D(\lambda) \circ L_{z_0}$.

Moreover, we can introduce a homogeneous space (in the sense of Coifman and Weiss) (R^{N+1}, d, dx) , where d is a $D(\lambda)$ -homogeneous distance and dx is a Lebesgue measure, and we can construct the relative spaces of bounded mean oscillation and vanishing mean oscillation functions, BMO_L and VMO_L respectively, (see Definizione 5.3).

We'll suppose that

H₃) $a_{ij} \in VMO_L(R^{N+1})$ for $i, j = 1, \dots, q$.

For every open $\Omega \subset R^{N+1}$ and $p \in]1, \infty[$, we denotes by $S^p(L, \Omega)$, the space

$$S^p(L, \Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / u_{x_i}, u_{x_i x_j}, Yu \in L^p(\Omega), i, j = 1, \dots, q\},$$

where $Y = \langle x, BD \rangle - \partial_t$, and

$$\|u\|_{S^p(L, \Omega)}^p = \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^q \|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i,j=1}^q \|u_{x_i x_j}\|_{L^p(\Omega)}^p + \|Yu\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

We prove a-priori estimates in $S_{loc}^p(L, \Omega)$ for solutions of $Lu = f$, $f \in L^p(R^{N+1})$. More precisely:

If $\Omega' \subset\subset \Omega$ then there exists a positive constant c such that

$$\|u\|_{S^p(\Omega')} \leq c(\|Lu\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)})$$

for every $u \in S_{loc}^p(L, \Omega)$.

(see Teorema 5.5).

For this goal, the first step is to derive explicit representation formula for the derivates of a solution of $Lu = f$, (see Teorema 4.3). The second step is to prove L^p estimates for the singular integrals operators (of "convolution" type, respect to the o translations, and with variable kernels), involved in the representation formula, via expansion in spherical harmonics, (see section 5).

This technique is due to Calderón-Zygmund and it is developped by Chiarenza-Frasca-Longo [CFL] in elliptic case (see also section 2).

BIBLIOGRAFIA

- [BC] M. Bramanti, M.C. Cerutti, *Commutators of singular integrals and parabolic equations with VMO coefficients*, preprint..
- [B] N. Burger, *Espace des fonctions à variation moyenne bornée sur un espace de nature homogène*, C. R. Acad. Sc. Paris **286** (1978), 139-142.
- [CZ] A.P. Calderón, A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. **88** (1952), 85-139.
- [CFL] F. Chiarenza, M. Frasca, P. Longo, *Interior $W^{2,p}$ estimates for non divergence elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ric. Mat. **XL** (1991), 149-168.
- [CW] R. Coifman, G. Weiss, *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes*, Lecture Notes in Math., Springer Verlag **242**.
- [C] M. Cotlar, *A combinatorial inequality and it applications in L^2 spaces*, Rev. Math. Cuyana **1** (1955), 45-55.
- [FR] E.B. Fabes, N.M. Rivière, *Singular integrals with mixed homogeneity*, Studia Math. **27** (1966), 19-38.
- [LP] E. Lanconelli, S. Polidoro, *On a class of hypoelliptic evolution operators*, Rend. Sem. Mat. Pol. Torino **51.4** (1993), 137-171.
- [RS] L. Rothschild, E. Stein, *Hypoelliptic differential operators on nilpotent groups*, Acta Math. **137** (1976), 247-320.